Hier die ausführlichen Lösungen (wenn auch nicht druckreif ☺):

Aufgabenblatt 5:

Aufgabe 1: Zeigen Sie für vollkommene Konkurrenz auf dem Faktormarkt:

a) Bei vollständiger Konkurrenz auf dem Gütermarkt wird jeder Faktor mit seinem Wertgrenzprodukt entlohnt. Bei einem Monopol auf dem Gütermarkt ist der Lohnsatz eines Faktors kleiner als sein Wertgrenzprodukt.

Produktion: $x = f(v_1, v_2, ..., v_n)$

Kosten: $K = w_1 v_1 + w_2 v_2 + ... + w_n v_n = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$

- bei vollständiger Konkurrenz gilt:

Gewinn: $G = px - K \;\Rightarrow\; G = px - \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$

Gewinnmaximierung: $\frac{\partial G}{\partial v_i} = p\frac{\partial x}{\partial v_i} - w_i \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; p\frac{\partial x}{\partial v_i} = w_i$,

wobei $\frac{\partial x}{\partial v_i} \equiv$ Grenzproduktivität (wieviel zusätzliche Einheiten Output, x, bekomme ich bei einer zusätzlichen Einheit des Faktors i, v_i?) und $p\frac{\partial x}{\partial v_i} \equiv$ Wertgrenzprodukt (Grenzprodukt multipliziert mit Gütermarktpreis).

Im Optimum gilt also, daß das Wertgrenzprodukt gleich dem Lohnsatz ist.

- beim Monopol gilt:

Gewinn: $G = p(x)x - K \;\; \Rightarrow \;\; G = p(x)x - \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$

Gewinnmaximierung: $\dfrac{\partial G}{\partial v_i} = \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v_i}x + p\dfrac{\partial x}{\partial v_i} - w_i \overset{!}{=} 0$

(1) $\Leftrightarrow \;\; \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v_i}x + p\dfrac{\partial x}{\partial v_i} = w_i$

$\Leftrightarrow \;\; \dfrac{\partial x}{\partial v_i}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}x + p\right) = w_i \qquad \Big| \, U'(x) = \dfrac{\partial p}{\partial x}x + p$

$\Leftrightarrow \;\; \dfrac{\partial x}{\partial v_i}U'(x) = w_i$

Da $\dfrac{\partial p}{\partial x} < 0, \dfrac{\partial x}{\partial v_i} > 0, x > 0$, ist in (1) der Term $\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v_i}x < 0$. Um die Gleichung zu erfüllen, muß das Wertgrenzprodukt dann größer als der Lohnsatz sein, bzw. $p\dfrac{\partial x}{\partial v_i} > w_i$.

b) Bei steigendem Skalenerträgen kann nicht jeder Faktor mit seinem Grenzprodukt entlohnt werden.

Betrachte Produktionsfunktionen die homogen vom Grade m sind, so daß für alle $\lambda > 0$ gilt

$$f(\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n) = \lambda^m f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda^m x\ .$$

Bei steigenden Skalenerträgen gilt $m > 1$. Wenn man nun beide Seiten nach k ableitet, ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda v_1}\frac{\partial \lambda v_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \lambda v_2}\frac{\partial \lambda v_2}{\partial \lambda} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial \lambda v_n}\frac{\partial \lambda v_n}{\partial \lambda} = m\lambda^{m-1}x \qquad \Big| \, \frac{\partial \lambda v_i}{\partial \lambda} = v_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \lambda v_1} v_1 + \frac{\partial x}{\partial \lambda v_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial \lambda v_n} v_n = m \lambda^{m-1} x$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \lambda v_i} v_i = m \lambda^{m-1} x$$

Trick: da diese Aussage für alle $\lambda > 0$ gilt, gilt sie auch für $\lambda = 1$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial v_i} v_i = m 1^{m-1} x \qquad \Big| 1^{m-1} = 1$$

(1) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial v_i} v_i = mx$

Falls das Wertgrenzprodukt gleich dem Lohn ist, gilt

$$p \frac{\partial x}{\partial v_i} = w_i$$

Da wir nur ein Gut betrachten, können wir ohne Probleme $p \equiv 1$ setzen, d.h., den Preis normieren.

(2) $\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v_i} = w_i$

(2) in (1) einsetzen ergibt

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = mx$ bzw. $\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i}{m} = x$

Eine Entlohnung gemäß des Wertgrenzproduktes würde dazu führen, daß die Summe der Kosten der Produktionsfaktoren größer als der Erlös $px = x$, $p = 1$, ist, da $m > 1$ gilt. Nicht alle Produktionsfaktoren können somit nach dem Wertgrenzprodukt entlohnt werden und müßten „Abstriche“ machen.

c) Bei einem heterogenen Polypol auf dem Gütermarkt entspricht im langfristigen Gleichgewicht die Skalenelastizität dem Verhältnis von Preis und Grenzumsatz.

Aus a) wissen wir, daß

$\frac{\partial x}{\partial v_i} U'(x) = w_i$ bzw.

(1) $\frac{\partial x}{\partial v_i} = \frac{w_i}{U'(x)}$

Analog zum Monopol wird für jeden Anbieter der monopolistischen Konkurrenz eine linear fallende Preis-Absatz-Funktion angenommen. Wir können den Fall der monopolistischen Konkurrenz genau wie den des Monopols behandeln.

Aus b) wissen wir

(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial v_i} v_i = mx$

(1) in (2) einsetzen

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{U'(x)} \cdot v_i = mx$ Zur Erinnerung: $U'(x) = \frac{\partial p}{\partial x} x + p$

$\Rightarrow \frac{1}{U'(x)} \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot v_i = mx \quad \Big| \cdot p$

(3) $\Rightarrow \frac{p}{U'(x)} \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot v_i = mpx$

Da die Unternehmen in der monopolistischen Konkurrenz im langfristigen Gleichgewicht Nullgewinne haben, gilt

(4) $px = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$

(4) in (3) einsetzen ergibt

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{U'(x)} \sum_{i=1}^{n} w_i \, v_i = m \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{p}{U'(x)} = m}$$

Aufgabe 2: (*Klausuraufgabe WS 98/99*) Ein Unternehmen produziert unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz Outputgüter mit Hilfe von Arbeit gemäß der Technologie $x = 10\sqrt{L}$ (hierbei ist x die produzierte Outputmenge und L ist die Anzahl der beschäftigten Arbeiter). Der Absatzpreis für das Outputgut beträgt $p = 5$. Wie hoch ist der gleichgewichtige Lohnsatz w, wenn 100 Arbeiter Beschäftigung suchen?

$x = 10\sqrt{L} \;\Leftrightarrow\; x = 10L^{1/2}$

$p = 5$

Gesucht: w_L^* bei $L = 100$.

$$G = U(x) - K(x) \;\Rightarrow\; G = px - \sum_{i=1}^{h} w_i v_i$$

Gewinnmaximierung (allgemein): $\dfrac{\partial G}{\partial v_i} = p\dfrac{\partial x}{\partial v_i} - w_i \overset{!}{=} 0$

(1) $\Leftrightarrow \; p\dfrac{\partial x}{\partial v_i} = w_i$ (Wertgrenzprodukt entspricht dem jeweiligen Faktorpreis)

Für den Faktor Arbeit gilt:

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial L} = 5L^{-1/2} = \dfrac{5}{\sqrt{L}}$

(2) in (1) einsetzen ($v_i = L$ und $w_i = w_L$):

$$\Rightarrow \; p\frac{\partial x}{\partial L} = w_L \qquad \Big| p = 5; L = 100;$$

$$\Rightarrow \; 5\frac{5}{\sqrt{100}} = w_L$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{w_L^* = 2.5}$$

Aufgabe 3: In einer Volkswirtschaft wird nur Weizen (Q) mit Hilfe der beiden Produktionsfaktoren Arbeit (A) und Boden (B) produziert, und zwar gemäß der Technologie $Q = \sqrt{AB}$. Die Menge verfügbaren Bodens sei 10.000 Hektar. Es gibt 900 Arbeitskräfte, die ihre Arbeitskraft unabhängig vom Lohnsatz anbieten.

a) Berechnen Sie den gleichgewichtigen Lohnsatz w und die gleichgewichtige Bodenrente in Weizeneinheiten.

$$Q = \sqrt{AB} \;\Leftrightarrow\; Q = A^{1/2}B^{1/2}$$

$$A = 900$$

$$B = 10.000$$

Gewinn: $G = U(Q) - K(Q) \;\Rightarrow\; \qquad G = pQ - \sum_{i=1}^{h} w_i v_i$

Gewinnmaximierung (allgemein): $\quad \frac{\partial G}{\partial v_i} = p\frac{\partial Q}{\partial v_i} - w_i \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \qquad p\frac{\partial Q}{\partial v_i} = w_i \qquad$ (Wertgrenzprodukt entspricht dem jeweiligen Faktorpreis)

Für den Lohnsatz gilt dann:

$$p\frac{\partial Q}{\partial A} = w_A \qquad \Big| \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{1}{2}\frac{B^{1/2}}{A^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{2}\frac{B^{1/2}}{A^{1/2}}\right) = w_A$$

$$\Leftrightarrow \quad p\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/2} = w_A$$ $\left| A = 900; B = 10.000\right.$, Normierung, da nur Weizen produziert wird: $p = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{w_A^* = \frac{1}{2}\left(\frac{10.000}{900}\right)^{1/2} = \frac{5}{3}}$$

Für die Bodenrente gilt:

$$p\frac{\partial Q}{\partial B} = w_B \qquad \left| \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{1}{2}\frac{A^{1/2}}{B^{1/2}}\right.$$

$$\Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{2}\frac{A^{1/2}}{B^{1/2}}\right) = w_B$$

$$\Leftrightarrow \quad p\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} = w_B$$ $\left| A = 900; B = 10.000\right.$, Normierung: $p = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{w_B^* = \frac{1}{2}\left(\frac{900}{10.000}\right)^{1/2} = \frac{3}{20}}$$

Bodenrente: $\boxed{B \cdot w_B^* = 10.000 \cdot \frac{3}{20} = 1.500}$

b) Wie viele Arbeitskräfte werden eingesetzt, wenn der Lohnsatz 2 Einheiten beträgt? Wie groß sind dann Lohnsumme und Bodenrente?

$$p\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/2} = w_A = 2 \qquad \left| p = 1; B = 10.000\right.$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{2}\left(\frac{10.000}{A}\right)^{1/2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad A^{1/2} = 25$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = 625$$

Lohnsumme: $\boxed{A \cdot w_A = 625 \cdot 2 = 1250}$

$$w_B = p\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \ w_B = \frac{1}{2}\left(\frac{625}{10.000}\right)^{1/2} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

Bodenrente: $\boxed{B \cdot w_B = 10.000 \cdot \frac{1}{8} = 1250}$

c) Berechnen Sie die Arbeitsnachfragefunktion.

$$p\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/2} = w_A$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{p}{2w_A}B^{1/2} = A^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{p^2}{4w_A^2}B \qquad \Big| p = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{B}{4w_A^2} \qquad \Big| B = 10.000$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{A = \frac{2.500}{w_A^2}}$$

Aufgabe 4: (*Klausuraufgabe WS 96/97*) Die Produktivität q eines Arbeiters in einer Volkswirtschaft sei gegeben durch die Funktion $q = \sqrt{T}$, wobei T die durchschnittliche Produktionsperiode ist. Die durchschnittliche Produktionsperiode sei $T = 4$. Bestimmen Sie den Reallohn dieser Volkswirtschaft. (Hinweis: Setzen Sie vereinfachend $\sqrt{e} = 1/0.6$).

$q = \sqrt{T}$

$T = 4$

Außerdem wissen wir: $k(T) = we^{rT}$

Im Gleichgewicht gilt sowohl

$q(T) = k(T)$

(1) $\Rightarrow \sqrt{T} = we^{rT}$

als auch $\dfrac{\partial q(T)}{\partial T} = \dfrac{\partial k(T)}{\partial T}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}T^{-1/2} = rwe^{rT}$

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{T}} = rwe^{rT}$

(1) in (2) einsetzen ergibt

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{T}} = r\sqrt{T}$

$r = \dfrac{1}{2\sqrt{T} \cdot \sqrt{T}} = \dfrac{1}{2T} \qquad \Big| T = 4$

(3) $\Rightarrow r = \dfrac{1}{8}$

$$\sqrt{T} = we^{rT}$$

$$\Rightarrow \; w = \frac{\sqrt{T}}{e^{rT}}$$

$$\Rightarrow \; w = \frac{\sqrt{4}}{e^{1/8\cdot 4}} = \frac{2}{e^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \qquad \Big| \, r = \frac{1}{8}, \sqrt{e} = 1/0.6$$

$$\boxed{w = 2 \cdot 0.6 = 1.2}$$