

Aufgabenblatt 2

Nr. 8)

Zusätzliche verbale Erklärungen folgen bald und werden hier eingefügt!

$y_1 \equiv$ Einkommen in Periode 1

$y_2 \equiv$ Einkommen in Periode 2

$c_1 \equiv$ Konsum in Periode 1

$c_2 \equiv$ Konsum in Periode 2

$s_1 \equiv$ Sparen in Periode 1

$p_1 \equiv$ Preis pro Konsumeinheit in Periode 1

$p_2 \equiv$ Preis pro Konsumeinheit in Periode 2

$i \equiv$ Zinssatz

1. Formulierung der Budgetrestriktion

$$y_1 + y_2 + is_1 = p_1c_1 + p_2c_2$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + i(y_1 - p_1c_1) = p_1c_1 + p_2c_2$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + iy_1 - ip_1c_1 = p_1c_1 + p_2c_2$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + iy_1 = p_1c_1 + p_2c_2 + ip_1c_1$$

$$\Leftrightarrow (1+i)y_1 + y_2 = (1+i)p_1c_1 + p_2c_2 \quad (a)$$

$$\Leftrightarrow y_1 + \frac{y_2}{1+i} = p_1c_1 + \frac{p_2c_2}{1+i} \quad (b)$$

2. Berechnung des Optimums über den Lagrange-Ansatz bei allgemeiner Nutzenfunktion $U(c_1, c_2)$

$$L(c_1, c_2, \lambda) = U(c_1, c_2) + \lambda[(1+i)y_1 + y_2 - (1+i)p_1c_1 - p_2c_2]$$

$$L_{c_1} = U_{c_1} - (1+i)\lambda p_1 \stackrel{!}{=} 0^* \quad \Rightarrow \lambda = U_{c_1} \frac{1}{(1+i)p_1} \quad (1)$$

$$L_{c_2} = U_{c_2} - \lambda p_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = U_{c_2} \frac{1}{p_2} \quad (2)$$

$$L_\lambda = (1+i)y_1 + y_2 - (1+i)p_1c_1 - p_2c_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

* Zur Erinnerung: $L_{c_1} = \frac{\partial L}{\partial c_1}$ (vgl. Notationen in der Formelsammlung)

Im Optimum gilt folglich:

$$\frac{U_{c_1}}{U_{c_2}} = (1+i) \frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

Bei gegebener Nutzenfunktion $U(c_1, c_2) = c_1 c_2$ gilt im Optimum:

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{c_1} &= (1+i) \frac{p_1}{p_2} \\ \Leftrightarrow c_2 &= (1+i) \frac{p_1 c_1}{p_2} \end{aligned} \quad (5)$$

bzw.

$$\begin{aligned} (1+i)y_1 + y_2 - (1+i)p_1 c_1 - p_2 \left[(1+i) \frac{p_1 c_1}{p_2} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (1+i)y_1 + y_2 - (1+i)p_1 c_1 - (1+i)p_1 c_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1+i)y_1 + y_2 - (1+i)2p_1 c_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1+i)2p_1 c_1 &= (1+i)y_1 + y_2 \\ \Leftrightarrow p_1 c_1 &= \left(y_1 + \frac{y_2}{1+i} \right) \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

3. Berechnung des Sparbetrags:

$$s_1 = y_1 - p_1 c_1 \quad (7)$$

bzw.

$$s_1 = y_1 - \left(y_1 + \frac{y_2}{1+i} \right) \frac{1}{2}$$

a) Bei $y_1 = 10.000$, $y_2 = 5.000$ und $i = 0$ kann nun s_1 berechnet werden:

$$\begin{aligned} s_1 &= 10.000 - \left(10.000 + \frac{5.000}{1} \right) \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow s_1 &= 10.000 - 7.500 \\ \Leftrightarrow \underline{s_1} &= \underline{2.500} \end{aligned}$$

b) Bei $y_1 = 10.000$, $y_2 = 5.000$ und $i = 0,05$ kann ebenso s_1^{i+} berechnet werden:

$$s_1^{i+} = 10.000 - \left(10.000 + \frac{5.000}{1,05} \right) \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow s_1^{i+} = 10.000 - 7.380,95$$

$$\Leftrightarrow \underline{s_1^{i+} = 2.619,05}$$

Nr. 9)

$F \equiv$ Freizeit in Stunden

$A \equiv$ Arbeitszeit in Stunden

$Z \equiv$ Zeitbudget (24 h)

$C \equiv$ Konsum

$w \equiv$ Lohnsatz pro Arbeitsstunde

$p \equiv$ Preis pro Konsumeinheit

1. Formulierung der Budgetrestriktion

$$pC = wA$$

$$pC = w(Z - F)$$

$$\text{da } Z = A + F$$

2. Berechnung des Optimums über den Lagrange-Ansatz bei allgemeiner Nutzenfunktion $U(F, C)$

$$L(F, C, \lambda) = U(F, C) + \lambda(pC - wZ + wF)$$

$$L_F = U_F + \lambda w \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = -U_F \frac{1}{w} \quad (1)$$

$$L_C = U_C + \lambda p \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = -U_C \frac{1}{p} \quad (2)$$

$$L_\lambda = pC - wZ + wF \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

Im Optimum gilt folglich:

$$\frac{U_F}{U_C} = \frac{w}{p} \quad (4)$$

Bei gegebener Nutzenfunktion $U(CF, C) = F^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{4}}$ gilt im Optimum:

$$\frac{\frac{1}{2} F^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} F^{\frac{1}{2}} C^{-\frac{3}{4}}} = \frac{w}{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2C}{F} = \frac{w}{p}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{w F}{p 2}$$

bzw.

$$p \left(\frac{w F}{p 2} \right) - wZ + wF = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{w}{2} F + wF = wZ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} F + F = Z$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{3}{2} F$$

$$Z = \frac{3}{2} (Z - A)$$

$$\text{da } Z = A + F$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{3} Z$$

a) Bei $Z = 24(h)$ kann nun A berechnet werden:

$$A = \frac{24}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{A = 8}$$