Formelsammlung

„Übung zur Einführung in die Volkswirtschaftslehre und Grundzüge der mikroökonomischen Theorie“

WS 2002/03

Jutta Wasserrab / Jens Großer

Universität Köln, Staatswissenschaftlches Seminar, Lehrstuhl Prof. C.C. von Weizsäcker

(diese Version: 06.02.2003)

I. Funktionen mit einer unabhängingen (erklärenden) Variable

Beispiele: $y = 3x$, $y = 11 + x^2$

Notationen:

- $y \equiv$ abhängige bzw. zu erklärende Variable (bei graphischen Darstellungen i.d.R. auf der vertikalen Achse zu finden)
- $x \equiv$ unabhängige bzw. erklärende Variable (bei graphischen Darstellungen i.d.R. auf der horizontalen Achse zu finden)
- $a, b, c, \ldots \equiv$ Konstanten
- $y = f(x) \equiv$ Funktion zwischen y und x[1]
- Erste Ableitungen: $f'(x)$ $\left[bzw.\ \frac{df(x)}{dx} \quad oder \quad \frac{dy}{dx} \right]$[2]
- Zweite Ableitungen: $f''(x)$ $\left[bzw.\ \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} \quad oder \quad \frac{d^2 y}{(dx)^2} \right]$[3]

---

[1] Falls mit verschiedenen Funktionen gearbeitet wird: $f(x), g(x), h(x), \ldots$.

[2] Bei verschiedenen Funktionen: $f'(x), g'(x), h'(x), \ldots \left[bzw.\ \frac{df(x)}{dx}, \frac{dg(x)}{dx}, \frac{dh(x)}{dx}, \ldots \right]$.

- bei mehreren Funktionen $f''(x)$, $g''(x)$, $h''(x)$, …

  bzw. $\frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$, , $\frac{d^2 h(x)}{(dx)^2}$, … oder $\frac{d^2 y_1}{(dx)^2}$, $\frac{d^2 y_2}{(dx)^2}$, $\frac{d^2 y_3}{(dx)^2}$, …

Ableitungsregeln:

- $f(x) = a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$ (Konstante Funktionen Regel)
- $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$ (Potenzregel)
- $f(x) = cx^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = cnx^{n-1}$ (verallgemeinerte Potenzregel)
- $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} \quad \Rightarrow \quad f'(x)+g'(x)$ (Summenregel)
- $\frac{d[f(x)-g(x)]}{dx} \quad \Rightarrow \quad f'(x)-g'(x)$ (Subtraktionsregel)
- $\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx} \quad \Rightarrow \quad f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ (Produktregel)
- $\frac{d[f(x)/g(x)]}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$ (Quotientenregel)
- falls $z = f(y)$ und $y = g(x)$, dann gilt:

  $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = f'(y)\cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Exponentialfunktionen:

- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$ bzw.
- $f(x) = be^{ax} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = abe^{ax}$ (Exponential-Funktion Regel)
- $f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$ (verallg. Exponential-Funktion Regel)

Logarthmusfunktionen:

- $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ (Logarithmus-Funktion Regel)

---

[3] Bei verschiedenen Funktionen: $f''(x), g''(x), h''(x),\ldots \left[bzw.\ \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}, \frac{d^2 g(x)}{(dx)^2}, \frac{d^2 h(x)}{(dx)^2},\ldots \right]$.

- $f(x) = \ln g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ (verallg. Logarithmus-Funktion Regel)

Rechenregeln für Logarithmusfunktionen:

Im folgenden sind u, v Konstanten oder Funktionen:

- $\ln(uv) = \ln u + \ln v, \; (u, v > 0)$ (Logarithmus eines Produktes)
- $\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v, \; (u, v > 0)$ (Logarithmus eines Quotienten)
- $\ln(u^a) = a \ln u, \; (u > 0)$ (Logarithmus einer Potenz)
- Aufgepaßt: für Summen und Subtraktionen von Logarithmen gilt nicht:
  $\ln(u \pm v) \neq \ln u \pm \ln v$

Optimierung (Relative Extrema):

- Notwendige Bedingung (Nullstellenbestimmung): $f'(x^*) \overset{!}{=} 0$
- Hinreichende Bedingung:

  Relatives Maximum: $f''(x^*) < 0$

  Relatives Minimum: $f''(x^*) > 0$

(Der obere Index * zeigt an, daß es sich um ein Extremum, also eine ausgewählten Punkt der Funktion handelt.)

Binomische Formeln:

u, v können sowohl Konstante als auch Variablen sein (manchmal hilfreich bei Berechnung von Extrema)

- $u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$
- $u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$
- $u^2 - v^2 = (u + v) \cdot (u - v)$

II. Funktionen mit zwei (bzw. *n*) unabhängingen (erklärenden) Variable

Beispiele: $y = 3x_1 + x_2$, $y = 11 + x_1^2 + 3x_2$

Notationen:

- y ≡ abhängige bzw. zu erklärende Variable
- $x_1, x_2 (,..., x_n)$ ≡ unabhängige bzw. erklärende Variablen (Hier wird gleichzeitig angenommen, das die erklärenden Variablen nicht nur unabhängig sind von y, sondern auch untereinander, d.h. sie begrenzen sich nicht gegenseitig. Diese Annahme gilt nicht immer (siehe „Extrema und Nebenbedingungen“)
- $y = f(x_1, x_2)$ ≡ Funktion zwischen y und den zwei unabhängigen Variablen x_1 und x_2 [4]
- Erste partielle Ableitungen:

$$f_{x_1}(x_1, x_2) \qquad \left[bzw. \ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \ \ oder \ \ \frac{\partial y}{\partial x_1} \right]$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) \qquad \left[bzw. \ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \ \ oder \ \ \frac{\partial y}{\partial x_2} \right]$$ [5]

Wenn deutlich ist, was die unabhängigen Variablen sind (z.B. aus der Aufgabenstellung), kann man auch die verkürzte Schreibweise f_{x_1} und f_{x_2} verwenden.

---

[4] Falls mit verschiedenen Funktionen gearbeitet wird: $f(x_1, x_2), g(x_1, x_2), h(x_1, x_2),...$.

[5] Bei verschiedenen Funktionen: $f_{x_1}(x_1, x_2)$, $f_{x_2}(x_1, x_2)$, $g_{x_1}(x_1, x_2)$, $g_{x_2}(x_1, x_2)$, $h_{x_1}(x_1, x_2)$, $h_{x_2}(x_1, x_2)$ $\left[bzw. \ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \ldots \right]$

III. Implizite Funktionen (bei zwei Variablen):

Beispiel: $y = f(x) = 3x^4$ (explizite Funktion)

$F(x,y) = y - 3x^4 = 0$ (implizite Funktion)

Notationen:

- $F(y,x) = 0 \equiv$ implizite Funktion zwischen y und x [*bzw.* $F(x_1, x_2) = 0$, denn häufig werden die Variablen auch x_1 und x_2 genannt]
- Spich: „ $F(y,x) = 0$ beschreibt die Funktion $y = f(x)$ implizit.“

Ableitungsregel:

- $F_y dy + F_x dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

Motivation:

Häufig liegt die explizite Funktion nur implizit vor (siehe z.B. Nutzenfunktionen) und ein Umformen wäre recht mühsam. Wir zeigen nun anhand von zwei Beispielen, wann die Ableitung der implizite Funktionen gebraucht wird bzw. nützlich ist:

Beispiel 1: $F(x,y) = y - 3x^4 = 0$

a) Ableitung der expliziten Funktion:

Durch einfaches Umformen erreichen wir: $y = f(x) = 3x^4$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = 12x^3$$

b) Ableitung der impliziten Funktion:

$F_x = -12x^3$

$F_y = 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{(-12x^3)}{1} = 12x^3$$

Beispiel 2: $F(x, y) = y^2 + x^2 + 10 = 0$

a) Ableitung der expliziten Funktion:

Durch Umformen erreichen wir: $y = f(x) = \sqrt{(-x^2 - 10)} = (-x^2 - 10)^{1/2}$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2}(-x^2 - 10)^{-1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{(-x^2 - 10)^{1/2}} = -\frac{x}{\sqrt{-x^2 - 10}}$$

b) Ableitung der impliziten Funktion:

$F_x = 2x$

$F_y = 2y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Da aber $y = \sqrt{-x^2 - 10}$ [siehe a)], sind die beiden Nenner der ersten Ableitung gleich und somit beide Ableitungen identisch.

Bei etwas schwierigeren Funktionen stellt sich die Ableitung der impliziten Funktion als die relativ leichtere Alternative heraus. Häufig reicht diese auch aus, z.B. wenn man zusätzliche Informationen bezüglich des Optiums hat (siehe Budgetgerade und Grenzrate der Substitution der Indifferenzkurve).

IV. Extrema und Nebenbedingungen:

Motivation:

- Hier sind die erklärenden Variablen x_1 und x_2 nicht mehr unabhäging voneinander, z.B. muß $x_1 + x_2 = 60$ sein (Beispiel: Budgetgerade)

Lagrange-Multiplikator Methode:

Notationen:

- $z = f(x, y)$ und $g(x, y) = c$ (Restriktion)
- $L = f(x, y) + \lambda[c - g(x, y)] \equiv$ Lagrange-Funktion
- Optimierung:

  Notwendige Bedingungen

$$
\begin{aligned}
L_\lambda &= c - g(x, y) \overset{!}{=} 0 \\
L_x &= f_x - \lambda g_x \overset{!}{=} 0 \\
L_y &= f_y - \lambda g_y \overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 1: $U(x_1, x_2)$ (Nutzenfunktion) und $\overline{Y} = p_1 x_1 + p_2 x_2$ (Budget-beschränkung)

a) *Optimierung mit der Lagrange-Multiplikator-Methode*:

$$L = U(x_1 x_2) + \lambda(\overline{Y} - p_1 x_1 - p_2 x_2) \qquad \text{(Lagrange-Funktion)}$$

Erste Ableitungen:1

1) $L_\lambda = \overline{Y} - p_1 x_1 - p_2 x_2 \overset{!}{=} 0$

2) $L_{x_1} = U_{x_1} - p_1 \lambda \overset{!}{=} 0$

3) $L_{x_2} = U_{x_2} - p_2 \lambda \overset{!}{=} 0$

Auflösen:

2) $\Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{U_{x_1}}{p_1}$

3) $\Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{U_{x_2}}{p_2}$

2) und 3) $\Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{U_{x_1}}{p_1} = \dfrac{U_{x_2}}{p_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dfrac{U_{x_1}}{U_{x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2}$

(Vergleiche dieses Ergbenins mit der graphischen Herleitung!)

V. Präferenzen

Notationen:

- $A \succ B$ $\quad [bzw. \;\; A(>)B]$
- $A \sim B$ $\quad [bzw. \;\; A(=)B]$
- $A \prec B$ $\quad [bzw. \;\; A(<)B]$

Axiome rationalen Verhaltens:

- Vollständigkeit:

  Die Menge der möglichen Relationen zwischen allen Alternativen. Bei zwei Alternativen sind dies:

  $A \succ B$, $A \sim B$, $A \prec B$
- Transitivität:

  $A \succ B \;\wedge\; B \succ C \;\Rightarrow\; A \succ C$

VI. Homogenität von Funktionen und Skalenerträge

Definition:

- Eine Funktion $f(x_1,...,x_N)$, mit $(x_1,...,x_N) > 0$, ist homogen vom Grade r falls für jedes $t > 0$

  $$f(tx_1,...,tx_N) = t^r f(x_1,...,x_N) \text{ gilt.}$$

  Falls das nicht gilt, wird die Funktion inhomogen genannt.

Beispiele:

- $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2} \;\Rightarrow\; f(tx_1,tx_2) = \dfrac{tx_1}{tx_2} = \dfrac{x_1}{x_2} = t^0 f(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$, also ist die Funktion homogen vom Grade 0.

- $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/2} \Rightarrow$

  $f(tx_1, tx_2) = (tx_1 tx_2)^{1/2} = (t^2 x_1 x_2)^{1/2} = t^1 (x_1 x_2)^{1/2} = t^1 f(x_1, x_2) = tf(x_1, x_2)$, also ist die Funktion homogen vom Grade 1.
- Cobb-Douglas Produktionsfunktion:

  $Q(v_1, v_2) = v_1^a v_2^b \Rightarrow$

  $Q(tv_1, tv_2) = (tv_1)^a (tv_2)^b = t^{a+b} v_1^a v_2^b = t^{a+b} Q(v_1, v_2)$, also ist die Funktion homogen vom Grade $a + b$.

Skalenerträge:

Bei proportionaler Variation der Inputfaktoren bei Produktionsfunktionen:

- $t < 1 \Rightarrow$ abnehmende Skalenerträge (diseconomies of scale)
- $t = 1 \Rightarrow$ konstante Skalenerträge
- $t > 1 \Rightarrow$ zunehmende Skalenerträge (economies of scale)

VII. Zinseszinsfaktor

- e^{rT}, wobei $r \equiv$ Zinsatz und $T \equiv$ Periode.

Herleitung:

Diskrete Zeitabstände:

$K(1) = K_0(1 + r)$

$K(2) = K_0(1 + r)(1 + r)$

...

$K(T) = K_0(1 + r)^T$

Kontinuierliche Zeitabstände (d.h. der Zins häuft sich kontinuierlich übers Jahr an):

$K(T) = K_0 e^{rT}$

$\Rightarrow$ Wird aus der diskreten Formel wie folgt hergeleitet:

$$K(T) = K_0(1+r)^T$$

$$= K_0\left(1+\frac{r}{1}\right)^{1\cdot T}$$

$$= K_0\left[\left(1+\frac{r}{1}\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{rT} \qquad \Bigg| m \equiv \frac{1}{r}$$

$$= K_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot}\right]^{rT} \qquad \Bigg| \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot} = e$$

$$= \lim_{m\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot r\cdot T} = K_0 e^{rT}$$

Beispiel:

Die Kosten $k(T) = we^{rT}$ aus dem Kapital- und Zinsmodell von Böhm-Bawerk.